Примеры решения задач

Задача №1

Колесо радиусом R=0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением φ=A + Bt + Ct^3, где B = 2 рад/с и C = 1 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время t = 2 с после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость *V*; в) угловое ускорение ε; г) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения, д) полное ускорение.

Дано: R=0,1 м, φ =A+Bt+Ct^3, B=2 рад/с, C=1 рад/c^3, t=2 с.

Найти: $\omega, V, \varepsilon, a_\tau, a_n, a_{полн}, \varphi.$

РЕШЕНИЕ

Угловую скорость найдем, взяв первую производную от угла поворота колеса по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(A + Bt + Ct^3\right)}{dt} = B + 3Ct^2. \qquad (1)$$

Подставив в формулу (1) заданные значения констант B и C и времени t, получим значение угловой скорости

$\omega = 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2$ =14(рад/с).

Зная, как связаны линейная и угловая скороти, найдем линейную скорость

$$V = \omega R; \qquad (2)$$

Подставив численне значения входящих в формулу величин, получим

$$V = 14 \cdot 0{,}1 = 1{,}4 (м/с).$$

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(B + 3Ct^2\right)}{dt} = 6Ct.$$

Для момента времени t=2c рассчитаем численное значение углового ускорения

$$\varepsilon = 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12 (рад/с^2).$$

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R;$

$$a_n = 14^2 \cdot 0{,}1 = 19{,}6 (м/с^2) .$$

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon \cdot R$;

$$a_\tau = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2 (м/с^2) .$$

Полное ускорение найдем по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2};$$

$$a = \sqrt{(19{,}6)^2 + (1{,}2)^2} = 19{,}64 (м/с^2) .$$

Ответ: ω=14 рад/с; V=1,4 м/с; ε=12 рад/с; a_τ=1,2 м/с^2; a_n=19,6 м/с^2; a=19,64 м/с^2.

Задача №2

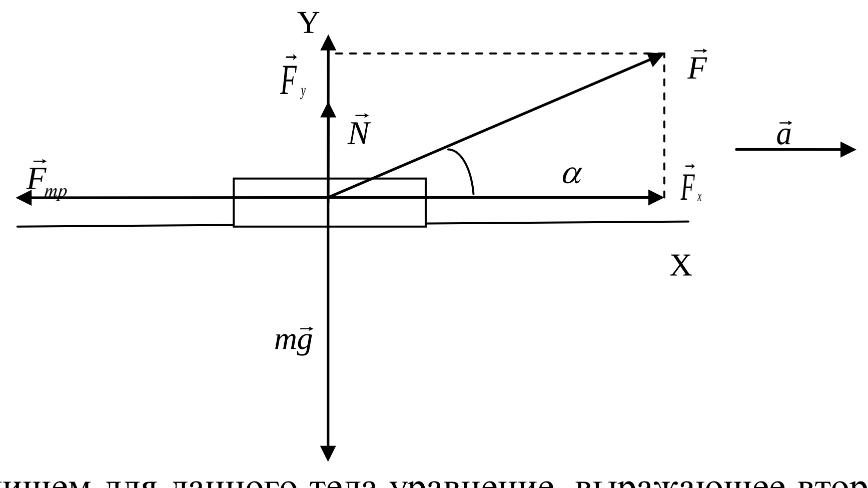
Груз массой 45кг перемещается по горизонтальной поверхности под действием силы 294Н, направленной под углом 30^0 к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость 0,1. Определить ускорение груза.

Дано: m=45 кг, F=294 Н, k=0,1, α=30^0.

Найти: a

РЕШЕНИЕ

На рисунке покажем силы, действующие на груз: $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – сила нормальной реакции плоскости, $\vec{F}$ – сила тяги, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения.



Запишем для данного тела уравнение, выражающее второй закон Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{тр}. \qquad (1)$$

Запишем уравнение (1) в проекціях на оси ОХ иОУ: формі

ОХ: $$F \cdot \cos\alpha - F_{тр} = ma; \qquad (2)$$

ОУ: $$N + F \cdot \sin\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) получим $N = mg - F \cdot \sin\alpha$,

тогда сила трения будет равна

$$F_{тр} = k \cdot N = k(mg - F \cdot \sin\alpha). \qquad (4)$$

Из (2), учитывая , найдем

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - F_{тр}}{m} = \frac{F \cdot \cos\alpha - k(mg - F \cdot \sin\alpha)}{m};$$

$$a = \frac{294 \cdot 0{,}87 - 0{,}1(45 \cdot 9{,}8 - 294 \cdot 0{,}5)}{45} = 5{,}99 (м/с^2);$$

$$[a] = \frac{Н - \left(\frac{кг \cdot м}{с^2} - Н\right)}{кг} = \frac{Н}{кг} = \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot кг} = \frac{м}{с^2}$$

<u>Ответ:</u> a=5,99 м/с ^{2}.

<u>Задача №3</u>

Маховик в виде диска радиусом 40см массой 4кг вращается с частотой 720мин $^{-1}$ вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Через 30с под действием тормозящего момента маховик останавливается. Найти тормозящий момент и число оборотов маховика до полной остановки.

<u>Дано:</u> m=4кг, ω=0, ν_0=720мин $^{-1}$, Δt=30с, R=0,4м

<u>Найти:</u> M, N

<u>РЕШЕНИЕ</u>

Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon \quad . \qquad (1)$$

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс:

$$I = \frac{m \cdot R^2}{2}, \tag{2}$$

где m – масса маховика, R – его радиус.

Маховик вращается равнозамедленно, поэтому

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot \Delta t, \text{ так как } \omega = 0, \text{ то } \varepsilon = \frac{\omega_0}{\Delta t}. \tag{3}$$

Известно, что $\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_0$.

Принимая во внимание выражение (3) для углового ускорения, уравнение (1) запишем как

$$M = I \cdot \varepsilon = I\left(-\frac{\omega_0}{\Delta t}\right) = -\frac{I \cdot 2\pi \cdot n_0}{\Delta t} = -\frac{mR^2 \cdot n_0 \pi}{\Delta t};$$

Подставим численные значения и рассчитаем *M*

$$M = -\frac{4 \cdot 0{,}4^2 \cdot 12 \cdot 3{,}14}{30} = -1{,}61(H \cdot м);$$

Выполним проверку единиц измерения

$$[M] = \frac{кг \cdot м^2}{c^2} = H \cdot м$$

Угол поворота маховика найдем по формуле

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2},$$

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{\omega_0}{\Delta t}$, получим

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0 \Delta t}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}.$$

Угол поворота и число оборотов связаны соотношением

$\varphi = 2\pi N$,

где N – число оборотов.

Тогда

$$2\pi N = \frac{\omega_0 t}{2},$$

Откуда $N = \frac{\omega_0 t}{4\pi} = \frac{2\pi n t}{4\pi} = \frac{nt}{2};$

$$N = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180(оборотов); \qquad [N] = \frac{c}{c} = 1$$

Ответ: M=1,61Н·м , N=180 оборотов.

Задача №4

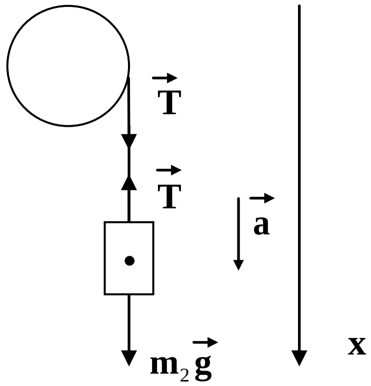
Маховик в виде сплошного цилиндра массой 10кг насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой 2кг. С каким ускорением будет опускаться гиря, если ее предоставить самой себе?

Дано: m_1=10кг, m_2=2кг

Найти: a

РЕШЕНИЕ

Ускорение гири численно равно тангенциальному ускорению точек



поверхности цилиндра $a = a_\tau$. Тангенциальное ускорение и угловое ускорения связаны соотновшением

$$a_\tau = \varepsilon R, (1)$$

где R – радиус цилиндра, поэтому $a = \varepsilon R$. (1)

Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$\varepsilon = \frac{M}{I}, \tag{2}$$

где M – вращающий момент, I – момент инерции цилиндра.

Для однородного цилиндра момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс

$$I = \frac{1}{2} m_1 R^2. \tag{3}$$

Вращающий момент, действующий на цилиндр, равен произведению силы T натяжения шнура на радиус цилиндра

$$M = T \cdot R. \tag{4}$$

На гирю действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Силу натяжения $\vec{T}$ найдем из второго закона Ньютона, записанного для гири в проекции на ось (см. рис.)

$$m_2 g - T = m_2 a, \tag{5}$$

Откуда

$$T = m_2 (g - a). \tag{6}$$

Тогда, подставляя (6) в (4), для вращающего момента можно записать

$$M = m_2 (g - a) R \ . \tag{7}$$

Подставляя в (2) выражения (3) и (7), получим угловое ускорение маховика

$$\varepsilon = \frac{2m_2(g-a)}{m_1 R}, \qquad (8)$$

Учитывая (1), найдем ускорение

$$a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g; \qquad (9)$$

$$a = \frac{2 \cdot 2}{10 + 2 \cdot 2} \cdot 9{,}81 = 2{,}8 (м/с^2), \qquad [a] = \frac{кг}{кг + кг} \cdot \frac{м}{с^2} = \frac{м}{с^2},$$

Ответ: а=2,8 м/с^2.

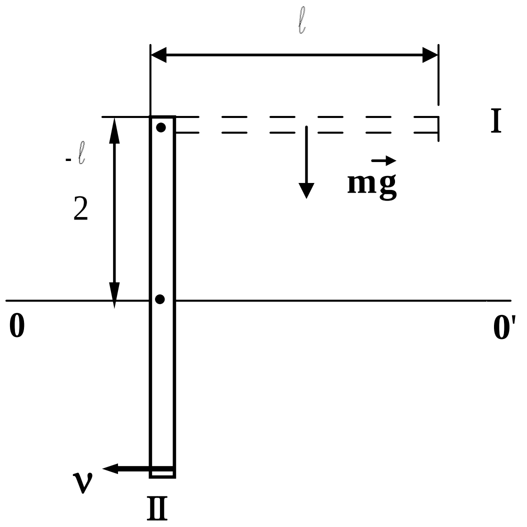
Задача №5

Тонкий однородный стержень длиной ℓ может вращаться вокруг горизонтальной оси, которая проходит через конец перпендикулярно стержню. Стержень отклоняют на 90^0 от положения равновесия и отпускают. Найти скорость V нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

Дано: L, α =90^0
Найти: V.

РЕШЕНИЕ

Стержень вращается вокруг оси под действием момента силы тяжести. Пренебрегая силами сопротивления и трения, воспользуемся для решения задачи законом сохранения энергии



$$E_I = E_{II}$$

где E_I – полная механическая энергия стержня в поднятом состоянии (состояние I на рисунке), равная потенциальной энергии поднятого стержня, E_{II} – полная механическая энергия стержня в вертикальном положении (состояние II на рисунке), равная кинетической энергии вращательного движения стержня. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии примем прямую $(00^{'})$, проходящую через центр масс стержня в его нижнем положении. Тогда

$$E_I = \frac{mg\ell}{2}. \tag{1}$$

Для кинетической энергии запишем

$$E_{II} = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{2}$$

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{mgl}{2} = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{3}$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера

$$I = I_0 + ma^2, \tag{4}$$

где $I_0 = \frac{1}{12}m\ell^2$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня, $a = \frac{\ell}{2}$ – расстояние между параллельными осями, роходящими через центр масс и точку подвеса стержня. Подставляя данные выражения I_0 и a в (4), получим

$$I = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2. \tag{5}$$

Учитывая связь линейной и угловой скорости $V = \omega\ell$ и подставляя в (3) выражение (5), получим

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2 \cdot \frac{V^2}{\ell^2} \cdot \frac{1}{2}; \tag{6}$$

Откуда выразим V

$$V = \sqrt{3g\ell}; \tag{7}$$

Ghjdthbv tlbybws bpvthtybz

$$[V]=\sqrt{\frac{м\cdot м}{c^2}}=\frac{м}{c}$$

Ответ: $V=\sqrt{3g\ell}.$

Задача №6

Диск массой 2кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью 4м/с. Найти кинетическую энергию диска.

Дано: m=2кг, v=4м/с

Найти: $E_к$

РЕШЕНИЕ

Движение диска можна представить как наложение двух независимых движений: поступального движения центра масс диска с линейной скоростью v и вращательного движения вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс диска.

Кинетическая энергия поступательноого движения

$$E_1=\frac{mV^2}{2}; \qquad (1)$$

кинетическая энергия вращательного движения

$$E_2=\frac{I\omega^2}{2}; \qquad (2)$$

учитывая, что $I=\frac{1}{2}mR^2$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс, а угловая скорость вращения диска $\omega=\frac{V}{R}$, выражение (2) будет иметь вид

$$E_2=\frac{mR^2V^2}{2\cdot 2\cdot R^2}=\frac{1}{4}mV^2. \qquad (3)$$

Полная кинетическая энергия с учетом выражений (1) и (3) будет равна:

$$E=E_1+E_2=\frac{mV^2}{2}+\frac{mV^2}{4}=\frac{3}{4}mV^2 \qquad (4)$$

Подставляя в (4) численные значения m и V, найдем

$$E=3/4\cdot 2\cdot 4^2=24(Дж);$$

Ответ: E=24 Дж.

Задача №7

В баллоне объемом 0,25 м^3 находится гелий под. давленим 10^6 Па при температуре 20ºС. После того, как часть газа выпустили, давление понизилось до 10^5 Па, а температура уменшилась до 10ºС. Определить на сколько уменшилась маса гелия в баллоне.

Дано:

$\mu = 4 \times 10^{-3}\,кг/моль,\ V = 0{,}25 м^3,\ t_1 = 20^\circ C,\ T_1 = 293K, P_1 = 10^6\,Па,\ P_2 = 10^5\,Па,\ t_2 = 10^\circ C,$
$T_2 = 283K.$

Найти: Δm.

РЕШЕНИЕ

До того, как часть газа була выпущена из баллона, его состояние определялось такими параметрами: давление P_1, объем V, масса m_1, температура T_1.

После того, как часть газа була выпущена из балона, состояние определялось параметрами: P_2, V, m_2, T_2.

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для первого и второго состояния газа

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1,$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2,$$

где V – объем газа, который по условию задачи остается постоянным, μ – молярная масса гелия. Выразим из этих уравнений m_1 и m_2 и найдем их разность Δm

$$m_1 = \frac{P_1 V \mu}{R T_1}; \qquad m_2 = \frac{P_2 V \mu}{R T_2},$$

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{V\mu}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right),$$

$$\Delta m = \frac{0{,}25 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8{,}31}\left(\frac{10^6}{293} - \frac{10^5}{283}\right) \approx 0{,}36(кг);$$

Выполним проверку единиц измерения:

$$[\Delta m] = \left[\frac{м^3 \cdot кг \cdot моль \cdot К \cdot Па}{моль \cdot Дж \cdot К}\right] = \left[\frac{м^3 \cdot кг \cdot Н}{м^2 \cdot Н \cdot м}\right] = [кг].$$

<u>Ответ</u>: $\Delta m = 0{,}36кг$.

<u>Задача №8</u>

Определить плотность азота при температуре 27ºС под давлением 760 мм рт. ст.

<u>Дано</u>:

$t = 27^\circ C, T = 300K, P = 760\ мм\ рт.ст. \approx 10^5\ Па,\ \mu = 28 \times 10^{-3} кг/моль.$

<u>Найти</u>: ρ

РЕШЕНИЕ

По определению плотность азота

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона выразим отношение массы газа к объему:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT;$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu\rho}{RT};$$

Подставив численне значения, найдем ρ

$$\rho = \frac{28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{8{,}31 \cdot 300} = 1{,}12\left(кг/м^3\right).$$

Выполним проверку единиц измерения

$$[\rho]=\left[\frac{кг\cdot Па\cdot моль\cdot К}{моль\cdot дж\cdot К}\right]=\left[\frac{кг\cdot Н}{м^2\cdot Н\cdot м}\right]=\left[\frac{кг}{м^3}\right].$$

Ответ: $\rho=1{,}12\,кг/м^3$.

Задача №9

Определить среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, плотность которого под давлением $P=1{,}6\cdot10^4$ Па составляет $\rho=0{,}3$ кг/м^3.

Дано: $P=1{,}6\cdot10^4\,Па,\ \rho=0{,}3кг/м^3$.

Найти: $\upsilon_{кв}$.

РЕШЕНИЕ

Средняя квадратичная скорость молекул идеального газа определяется по формуле

$$\upsilon_{кв}=\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \tag{1}$$

где m_0 – масса одной молекулы. Поскольку плотность газа

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{Nm_0}{V}=nm_0,$$

где m – масса газа, V– его объем, N – число всех молекул, то

$$m_0=\frac{\rho}{n}. \tag{2}$$

Если выразить n из уравнения

$$P=nkT \tag{3}$$

и подставить (2) и $n=\frac{P}{kT}$ в (1), то получим

$$\upsilon_{кв}=\sqrt{\frac{3kT}{\rho}\frac{P}{kT}}=\sqrt{\frac{3P}{\rho}},$$

$$\upsilon_{кв}=\sqrt{\frac{3\cdot1{,}6\cdot10^4}{0{,}3}}=400(м/с)$$

$$[\upsilon_{кв}] = \left[\sqrt{\frac{Па \cdot м^3}{кг}}\right] = \left[\sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot м^3}{кг \cdot с^2 \cdot м^2}}\right] = \left[\sqrt{\frac{м^2}{с^2}}\right] = \left[\frac{м}{с}\right].$$

Ответ: $\upsilon_{кв} = 400\, м/с$.

Задача №10

Найти среднюю кинетическую энергию $E_{вр}$ вращательного движения одной молекулы водовода при температуре 286 К а также кинетическую энергию $W_{вр}$ вращательного движения всех молекул этого газа, если его масса *m=4г.*

Дано: $T = 286\ K, m = 4г = 4 \cdot 10^{-3} кг, \mu = 2 \cdot 10^{-3} кг/моль$.

Найти: $E_{вр}$, $W_{вр}$.

РЕШЕНИЕ

На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия равная

$$E_1 = \frac{1}{2}kT.$$

Поскольку молекула водорода является двухатомной, то она имеет две вращательные степени свободы (для двухатомных газов число степеней свободы равно 5, три из них поступальные и две – вращательные).

Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы водорода

$$E_{вр} = 2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT,$$

$$E_{вр} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 286 = 3{,}95 \cdot 10^{-21} (Дж).$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекулгаза выражается соотношением

$$W_{вр} = NE_{вр},$$

где N – число молекул газа, которое можно найти как

$$N = \nu\, N_A = \frac{m}{\mu} N_A.$$

Тогда

$$W_{вр} = \frac{m}{\mu} N_A E_{вр}$$

Подставляя численные значения, получим

$$W_{вр} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}95 \cdot 10^{-21} = 4756(\textit{Дж}) \approx 4{,}8(\textit{кДж}).$$

Ответ: $E_{вр} = 3{,}95 \cdot 10^{-21}\,\textit{Дж}$; $W_{вр} = 4{,}8\,\textit{кДж}$.

Задача №11

Определить коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при этих же условиях равен 10мкПа·с.

Дано:

$\eta = 10\textit{мкПа} \cdot \textit{с} = 10^{-5}\,\textit{Па} \cdot \textit{с},\ \mu = 28 \cdot 10^{-3}\textit{кг/моль}$.

Найти: λ.

РЕШЕНИЕ

Коэффициент теплопроводности определяется по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle, \tag{1}$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул газа, $\langle l \rangle$ – длина свободного пробега молекул. Коэффициент динамической вязкости определяется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle. \tag{2}$$

Учитывая (2) выражение (1) можно записать в виде

$$\lambda = c_V \eta. \tag{3}$$

Так как $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, то

$$\lambda = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}\eta. \tag{4}$$

Для двухатомной молекулы азота $i=5$.

Подставляя численне значения, получим

$$\lambda = \frac{5 \cdot 8{,}31 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 7{,}42\left(\frac{мВт}{м \cdot К}\right).$$

Ответ: $\lambda = 7{,}42\,\frac{мВт}{м \cdot К}$.

Задача №12

На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считать, что температура везде однакова и равна 10ºС.

Дано:

$P = 0{,}6P_0,\ t = 10^{\circ}C,\ T = 283K,\ \mu = 29 \cdot 10^{-3}\, кг/моль$

Найти: h

РЕШЕНИЕ

Давление на висоте h определим из барометрической формулы

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}};$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\frac{\mu g h}{RT}};$$

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g h}{RT};$$

$$h = -\frac{RT}{\mu g}\ln\frac{P}{P_0}.$$

Подставив численные значения получим

$$h = -\frac{8{,}31 \cdot 283 \cdot \ln 0{,}6}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 4{,}22 \cdot 10^{3}\,(м).$$

Ответ: $h = 4{,}22 \cdot 10^{3}\, м \approx 4{,}2\, км.$.

Задача №13

Определить количество теплоты, которое поглощает водород массой 0,2 кг при нагревании от температуры $t_1 = 0^{\circ}C$ до температуры $t_2 = 100^{\circ}C$ при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и выполненную газом работу.

Дано:

$\mu = 2 \cdot 10^{-3} кг/моль, m = 0{,}2кг, t_1 = 0^\circ C, T_1 = 273K, t_2 = 100^\circ C, T_2 = 373K$

Знайти: $Q, \Delta U, A$

РЕШЕНИЕ

Количество теплоты, которое поглощает газ при изобарическом нагревании, орпеделяется формулой

$$Q = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T, \qquad (1)$$

где C_p – молярная теплоемкость при постоянном объеме. Как известно,

$$C_P = \frac{i+2}{2} R, \qquad (2)$$

где i – число степеней свободы. Для двухатомной молекулы водорода $i=5$. Подставляя выражение (2) в (1), получим

$$Q = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \Delta T,$$

$$Q = \frac{0{,}2 \cdot (5+2) \cdot 8{,}31 \cdot (373-273)}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = 291(кДж).$$

Изменение внутренней энергии идеального газа определяется формулой

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T;$$

$$\Delta U = \frac{0{,}2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 100}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 208(кДж).$$

Работу расширения газа можно найти из первого начала термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

откуда

$$A = Q - \Delta U.$$

$$A = 293 - 208 = 83(кДж)$$

Ответ: $Q = 291кДж$; $\Delta U = 208кДж$; $A = 83кДж$.

Задача №14

Нагреватель тепловой машины, которая работает по циклу Карно, имеет температуру $t_1 = 200^\circ C$. Определить температуру T_2 холодильника, если при получении количества теплоти $1кДж$ машина совершает работу $A = 0{,}4кДж$?

Дано:

$t_1 = 200^o C, T_1 = 473K, Q_1 = 1 \cdot 10^3$ *Дж*, $A = 4 \cdot 10^2$ *Дж*.

Найти: T_2.

РЕШЕНИЕ

К.п.д. машины, работающей по циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Откуда

$$T_2 = T_1(1 - \eta). \tag{1}$$

К.п.д. тепловой машины можно выразить как отношение количества теплоты, которое превращено в работу A, к количеству теплоты, которое получает рабочее тело тепловой машины от нагревателя Q_1

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \tag{2}$$

Тогда

$$T_2 = T_1\left(1 - \frac{A}{Q_1}\right);$$

и подставляя численные значения, получим

$$T_2 = 473 \cdot \left(1 - \frac{0,4 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3}\right) = 284(K).$$

Ответ: $T_2 = 284K$.

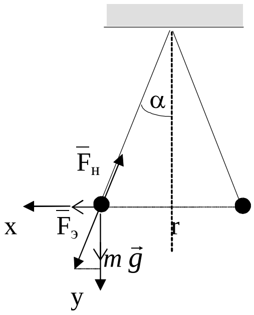
Задача №15

Два одинаково заряженных шарика, имеющие массу 0,5г каждый и подвешенные на нитях длиной 1 м, разошлись на 4 см друг от друга. Найти заряд каждого шарика.

Дано: $m_1=m_2=m=0,5$г$=5\times10^{-4}$ кг, $l=1$м; $r=4$ см$=4\times10^{-2}$м.

Найти: $q_1=q_2=q$-?

РЕШЕНИЕ



Так как шарики заряжены, то на каждый из них действует сила электростатического отталкивания $\vec{F}_э$. Кроме того на шарики действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_н$. Направления сил указаны на рисунке. По условию равновесия равнодействующая всех сил равна нулю:

$$\vec{F}_э + m\vec{g} + \vec{F}_н = 0 \qquad (1),$$

где
$$F_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{r^2}.$$

Выбираем систему координат x0y, как показано на рисунке, и запишем уравнение (1) в проекциях на оси 0x и 0y:

$$0x:\quad F_э - F_н \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$0y:\quad mg - F_н \cos\alpha = 0 \qquad (3).$$

Уравнение (2) делим на уравнение (3):

$$F_э/mg = \operatorname{tg}\alpha \qquad (4).$$

По условию $r \ll l$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha = r/2l$.

Тогда из (4):

$$q^2/4\pi\varepsilon_o = mgr/(2l),$$

отсюда

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 mgr^3}{2l}}.$$

Подставим численнве значения

$$q = \sqrt{\frac{4\times 3{,}14\times 8{,}85\times 10^{-12}\times 5\times 10^{-4}\times 9{,}8\times (4\times 10^{-2})^3}{2\times 1}} = 1{,}3\times 10^{-9}\ (Кл).$$

<u>Ответ</u>: $q = 1{,}3\times 10^{-9}$ Кл.

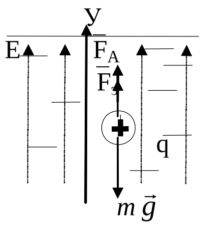
<u>Задача №16</u>

Стальной шар радиусом 0,5 см, погруженный в керосин, находится в однородном электрическом поле напряженностью 35 кВ/см, направленной вертикально вверх. Определите заряд шара, если он находится во взвешенном состоянии.

<u>Дано</u>: R=0,5 см=5.10^{-3} м, E=35 кВ/см=35.10^{5}В/м; ρ=$7{,}8.10^{3}$кг/м^3-<u>плотность стали, $\rho_к$=$0{,}8.10^3$ кг/м^3 -плотность керосина.</u>

<u>Найти:</u> q-?

РЕШЕНИЕ



На шар действуют:

а) сила $F_э$ со стороны электрического поля $F_э=qE$,

б) сила тяжести: $mg=\rho Vg=\rho(4/3)\pi R^3 g$;

в) выталкивающая сила (сила Архимеда) $F_A=\rho_к Vg=\rho_к(4/3)\pi R^3 g$,

где $V=(4/3)\pi R^3$ - объем шара.

Под действием этих сил шар находится в равновесии, т.е.

$$\vec{F}_э + m\vec{g} + \vec{F}_A = 0.$$

В проекции на ось ОУ: $F_э - mg + F_A = 0$,

или

$$qE = mg - F_A,$$

тогда

$$qE = (4/3)\pi R^3 g(\rho - \rho_к).$$

Отсюда

$$q = (4/3E)\pi R^3 g(\rho - \rho_к)$$

Подставим численные значения

$$q = \frac{4\times 3{,}14\times(5\times10^{-3})^3\times 9{,}8\times(7{,}8-0{,}8)\times10^3}{3\times35\times10^5} = 10{,}5\times10^{-9}\ Кл = 10{,}5н\ Кл$$

Ответ: q=10,5нКл.

Задача №17

Электрическое поле создано двумя точечными зарядами 30 нКл и -10 нКл. Расстояние между зарядами равно 20 см. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии 15 см от первого и на расстоянии 10 см от второго зарядов.

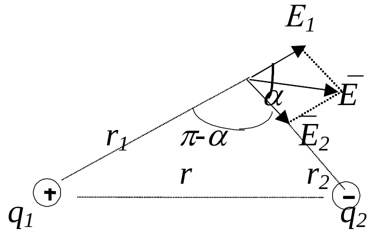
Дано: $q_1=3.10^{-8}$Кл, $q_2=10^{-8}$Кл, d=0,2 м, r_1=0,15 м; r_2=0,10 м.

Найти: Е-?

РЕШЕНИЕ

Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{|q_1|}{r_1^2}, \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{|q_2|}{r_2^2}.$$



Вектор $\bar{E}_1$ направлен по силовой линии от заряда q_1, так как $q_1>0$, вектор $\bar{E}_2$ направлен также по силовой линии, но к заряду q_2, так как $q_2 < 0$.

Абсолютное значение вектора Е найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где угол α может быть найден из треугольника со сторонами d, r_1 и r_2:

$\cos\alpha = (d^2 - r_1^2 - r_2^2)/(2r_1 r_2) = 0{,}25$.

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4}+\frac{q_2^2}{r_2^4}+2\frac{|q_1||q_2|}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha}$$

Произведя вычисления, найдем

$$E=\frac{1}{4\times3{,}14\times8{,}85\times10^{-12}}\sqrt{\frac{(3\times10^{-8})^2}{0{,}15^4}+\frac{(10^{-8})^2}{0{,}1^4}+2\frac{|3\times10^{-8}||10^{-8}|}{0{,}15^2\times0{,}1^2}\times0{,}25}=16{,}7\text{кВ/м.}$$

<u>Ответ</u>: E=16,7 кВ/м.

<u>Задача №18</u>

Шарик массой 1 г перемещается между точками, потенциал первой 600 В, второй - равен нулю. Определить скорость шарика в первой точке, если во второй точке его скорость 30 см/с. Заряд шарика 10 нКл.

<u>*Дано:* m=10^{-3} кг, φ_1=600 В, φ_2=0, v_2=0,3 м/с, q=10^{-8} Кл</u>

Найти: υ_1=?

Решение. Шарик перемещается в электрическом поле под действием силы со стороны поля. Работа этой силы A = q (φ_1 - φ_2). По теории об изменении кинетической энергии $A=\Delta E_K$, где $\Delta E_K=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}$ - изменение кинетической энергии шарика. $q(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Отсюда $\upsilon_1=\sqrt{\upsilon_2^2-\frac{2q\varphi_1}{m}}$; v_1=0,28 (м/с).

<u>Задача №19</u>

Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью 10^6 м/с. Длина конденсатора 1 см, напряженность электрического поля в нем 5.10^3 В/м. Найти скорость электрона при вылете из конденсатора и его смещение Δy.

<u>Дано:</u> v_0=10^6 м/с; l=10^{-2}м, E=5.10^3 В/м; m_e=9?1/10^{-31} кг; q_e=1,6.10^{-19} Кл.

<u>Найти</u>: v - ? Δy -?

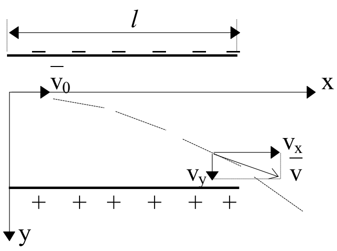
<u>РЕШЕНИЕ</u>

Сила тяжести, действующая на электрон, равна

$$F_m=mg=9.10^{-30}\text{ Н.}$$

Со стороны электрического поля на электрон действует сила

$$F_э=q_e E=1{,}6.10^{-19}.5000=8.10^{-16}\text{Н.}$$



Следовательно, $F_т$ << $F_э$. Можно считать, что движение электрона происходит только под действием силы $F_э$. Так как вектор начальной скорости электрона $\bar{\upsilon}_0$ параллелен пластинам, то траектория электрона - парабола. Движение электрона можно рассматривать как сумму двух движений - вдоль осей 0x и 0y. Вдоль оси 0x - движение равномерное со скоростью υ_0. Поэтому $l=\upsilon_0$ t, где t - время движения в поле конденсатора, откуда:

$$t=l/\upsilon_0 \qquad (1).$$

Вдоль 0У - движение равноускоренное под действием силы

$$F_э=q_e E.$$

По второму закону Ньютона $F_э$ = $m_e a$. Отсюда ускорение электрона:

$$a=(q_e E)/m_e\,. \qquad (2)$$

Начальная скорость вдоль оси 0y: $\upsilon_{0y}=0$. Тогда перемещение вдоль оси 0y: $\Delta y= at^2/2$.

Учитывая (1) и (2), получим:

$$\Delta y=q_e E l^2 / (2m_e\upsilon_0) \quad \Delta y=4{,}4 .10^{-2} \text{ м.}$$

Скорость электрона в момент вылета из конденсатора направлена по касательной к траектории его движения. Она равна:

$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$,

где $\upsilon_x=\upsilon_0$, $\upsilon_y=at=(q_e E l)/(m_e\ \upsilon_0)$ =8,8.10^6 (м/с).

Тогда $\upsilon=\sqrt{10^{12}+8{,}8^2.10^{12}}$ =8,85.10^6 (м/с)

Ответ: υ=8,85.10^6 м/с; Δy= 4,4 .10^{-2} м.

Задача №20

Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора, присоединенного к источнику напряжения с ЭДС 180 В равно 5 мм. Площадь пластин конденсатора 175 см^2. Найти работу по раздвижению пластин до расстояния 12 мм, если конденсатор перед раздвижением пластин отключен от источника.

Дано: ε =180 В, d_1 =5.10^{-3} м, d_2 =12.10^{-3} м, S = 1,75.10^{-2} м^2.

Найти: А - ?

РЕШЕНИЕ

При раздвижении пластин меняется емкость конденсатора, а заряд на пластинах остается постоянным, так как конденсатор отключен от источника. Следовательно, меняется энергия заряженного конденсатора. Работа по раздвижению пластин равна изменению энергии конденсатора, т.е.

$$A=\Delta W=W_2 - W_1 , \qquad (1)$$

где $W_1=q^2/(2C_1)$, $W_2=q^2/(2C_2)$.

Емкость конденсатора до раздвижения пластин $C_1=\varepsilon_0 S/d_1$, а после раздвижения пластин емкость: $C_2=\varepsilon_0 S/d_2$.

Заряд на пластинах найдем из условия $q=C_1U_1 = \varepsilon_0 S\varepsilon / d_1$, так как $U_1=\varepsilon$.

Таким образом,

$$A =\varepsilon_0 S\varepsilon^2 (d_2 - d_1)/(2 d_1^2)$$

Подчтавляя численные значения, получим

$$A=7.10^{-7} \text{ Дж}=700 \text{ нДж.}$$

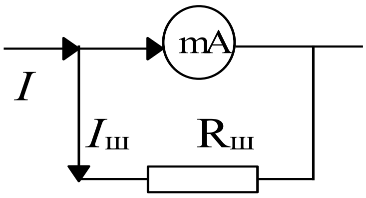
Ответ: A=7.10^{-7} Дж=700 нДж.

Задача №21

Миллиамперметр предназначен для измерения силы тока не более 10 мА. Что нужно сделать для того, чтобы миллиамперметр можно было применить для измерения силы тока до 1 А, если его внутреннее сопротивление 0,9 Ом?

Дано: $I_0=10^{-2}$А, R_0=0,9 Ом, I=1А.
Найти: $R_ш$ - ?

РЕШЕНИЕ



Миллиамперметр включается в цепь последовательно. Если в цепи сила тока I больше максимальной I_0, на которую рассчитан миллиамперметр, то параллельно ему следует включить сопротивление $R_ш$, называемого шунтом. Оно выбирается таким, чтобы сила тока в приборе не превышала I_0. По законам параллельного соединения:

$I= I_0 +I_ш$ и $I_0 /I_ш = R_ш/R_0$.

Откуда : $R_ш= I_0 R_0/(I- I_0)$ $R_ш$=0,1 Ом

Задача №22

Определить ток короткого замыкания для источника, который при токе в цепи I_1=10 А имеет полезную мощность P_1=500 Вт, а при токе I_2=5А – мощность P_2=375 Вт.

Дано: I_1=10А, P_1=500 Вт, I_2=5А, P_2=375 Вт.
Найти: $I_{к.з.}$ - ?

РЕШЕНИЕ

При коротком замыкании сопротивление внешней цепи R=0. Поэтому

$$I_{к.з.} = \varepsilon /r.$$

Полезная мощность

$$P=I\,U,$$

где U - напряжение на зажимах источника или падение напряжения на зажимах источника или падение напряжения на внешнем сопротивлении. Тогда

$$U_1=P_1 / I_1,$$

а из закона Ома:

$$U_1 =\varepsilon - I_1 r .$$

Аналогично:

$$U_2 = P_2 / I_2 = \varepsilon - I_2 r.$$

Следовательно:

$$P_1 / I_1= \varepsilon - I_1 r ; \qquad (1)$$

$$P_2 / I_2 = \varepsilon - I_2 r. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из выражения (1) выражение (2):

$$P_1 / I_1 - P_2 / I_2= (I_2 - I_1)r.$$

Отсюда

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{(I_2 - I_1) I_1 I_2}.$$

$$\varepsilon = U_1 + I_1 r = \frac{P_1}{I_1} + I_1 r$$

Подставив численные значения, получим

r= 5 Ом; ε=100 В

Тогда ток короткого замыкания: $I_{к.з.} = \varepsilon / r = 100/5 = 20$ (А).

Ответ: $I_{к.з.}$ = 20 А.

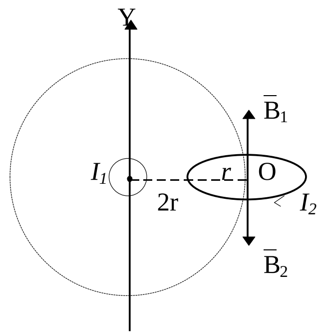
Задача №23

Круговой виток радиуса r, по которому течет ток I_2 находится вблизи бесконечного прямого провода, по которому течет ток I_1. Проводник и виток лежат в одной плоскости. Расстояние от центра витка до проводника равно 2r. Определите индукцию магнитного поля в центре витка. Как должна измениться сила тока I_2, чтобы индукция магнитного поля в центре витка стала равна нулю?

Дано: $I_1, I_2, r, 2r$.

Найти: B_0 - ? ΔI_2 - ?

РЕШЕНИЕ



Магнитное поле создается прямым проводником с током I_1 и круговым витком с током I_2. Поэтому индукция в точке О определится по принципу суперпозиции:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ определим по «правилу буравчика». Тогда в проекции на ось OY:

$$B_0 = B_1 - B_2,$$

где индукция магнитного поля бесконечно длинного проводника

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a};\ a=2r$$

индукция магнитного поля кругового тока

$$B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2r}.$$

Тогда

$$B_0=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi r}-\frac{\mu_0 I_2}{2r} = \frac{\mu_0}{2r}\left(\frac{I_1}{2\pi}-I_2'\right)$$

Если B_0=0, то

$$\left(\frac{I_1}{2\pi}-I_2'\right)=0, \text{ т.е. } I_2' = I_1/2\pi;$$

$$\Delta I_2 = I_2 - I_2' = I_2 - I_1/2\pi$$

<u>Задача №24</u>

Протон влетает со скоростью 10^3м/с в однородное магнитное поле под углом 60° к линиям индукции. Определите радиус и шаг спиральной линии, по которой будет двигаться протон, если модуль вектора индукции магнитного поля равен B=10^{-3} Тл.

<u>Дано</u>: $\upsilon=10^3$, $\alpha=60^\circ$, $B=10^{-3}$Тл, $m=1{,}67.10^{-27}$кг, $q = 1{,}6.10^{-19}$Кл

<u>Найти</u>: R - ? h - ?

<u>РЕШЕНИЕ</u>

Разложим вектор скорости $\vec{\upsilon}$ по двум направлениям – вдоль поля и перпендикулярно ему. Тогда $\upsilon_\perp=\upsilon \sin\alpha$ приведет к действию силы Лоренца:

$$F_л = q\upsilon B \sin\alpha = q\,\upsilon_\perp B.$$

Направлена эта сила перпендикулярно $\vec{\upsilon}_\perp$ и $\vec{B}$ (на нас – по «правилу левой руки»). За счет этой силы протон будет двигаться по окружности радиуса R с центростремительным ускорением $a=\upsilon_\perp^2/R$. По второму закону Ньютона

$$F_л = ma,$$

тогда $q\,\upsilon_\perp B= m\upsilon_\perp^2/R$.

Отсюда: $R=\frac{m\upsilon_\perp}{qB}=\frac{m\upsilon\sin\alpha}{qB}$

За счет второй составляющей скорости $\upsilon_\parallel$ протон равномерно движется равномерно вдоль линии магнитной индукции. Тогда

$$h= \upsilon_\parallel T= \upsilon T\cos\alpha,$$

где T – период обращения протона.

$$T=\frac{2\pi R}{\upsilon_\perp}=\frac{2\pi m\upsilon_\perp}{qB\upsilon_\perp}=\frac{2\pi m}{qB}.$$

$$h=\frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{qB}$$

R=9.10^{-3} м =9 мм; h=$3{,}2.10^{-2}$ м=3,2 см.